

ルイス・キャロルとジョン・サールにおけるモーダス・ポネンスの無限後退

What the Tortoise Said to Achilles

https://en.wikisource.org/wiki/What_the_Tortoise_Said_to_Achilles

WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES.

By Lewis Carroll.

Achilles had overtaken the Tortoise, and had seated himself comfortably on its back.

"So you've got to the end of our race-course?" said the Tortoise. "Even though it does consist of an infinite series of distances? I thought some wiseacre or other had proved that the thing couldn't be done?"

"It can be done," said Achilles. "It has been done! Solvitur ambulando. You see the distances were constantly diminishing; and so—"

"But if they had been constantly increasing?" the Tortoise interrupted. "How then?"

"Then I shouldn't be here," Achilles modestly replied; "and you would have got several times round the world, by this time!"

"You flatter me—flatten, I mean," said the Tortoise; "for you are a heavy weight, and no mistake! Well now, would you like to hear of a race-course, that most people fancy they can get to the end of in two or three steps, while it really consists of an infinite number of distances, each one longer than the previous one?"

"Very much indeed!" said the Grecian warrior, as he drew from his helmet (few Grecian warriors possessed pockets in those days) an enormous note-book and a pencil. "Proceed! And speak slowly, please! Short-hand isn't invented yet!"

"That beautiful First Proposition of Euclid!" the Tortoise murmured dreamily.

"You admire Euclid?"

"Passionately! So far, at least, as one can admire a treatise that wo'n't be published for some centuries to come!"

"Well, now, let's take a little bit of the argument in that First Proposition—just two steps, and the conclusion drawn from them. Kindly enter them in your note-book. And in order to refer to them conveniently, let's call them A, B, and Z:—"

- (A) Things that are equal to the same are equal to each other.
- (B) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
- (Z) The two sides of this Triangle are equal to each other.

Readers of Euclid will grant, I suppose, that Z follows logically from A and B, so that any one who accepts A and B as true, must accept Z as true?"

"Undoubtedly! The youngest child in a High School—as soon as High Schools are invented, which will not be till some two thousand years later—will grant that."

"And if some reader had not yet accepted A and B as true, he might still accept the sequence as a valid one, I suppose?"

"No doubt such a reader might exist. He might say 'I accept as true the Hypothetical Proposition that, if A and B be true, Z must be true; but, I don't accept A and B as true.' Such a reader would do wisely in abandoning Euclid, and taking to football."

"And might there not also be some reader who would say 'I accept A and B as true, but I don't accept the Hypothetical'?"

"Certainly there might. He, also, had better take to football."

"And neither of these readers," the Tortoise continued, "is as yet under any logical necessity to accept Z as true?"

"Quite so," Achilles assented.

"Well, now, I want you to consider me as a reader of the second kind, and to force me, logically, to accept Z as true."

"A tortoise playing football would be—" Achilles was beginning

"—an anomaly, of course," the Tortoise hastily interrupted. "Don't wander from the point. Let's have Z first, and football afterwards!"

"I'm to force you to accept Z, am I?" Achilles said musingly. "And your present position is that you accept A and B, but you don't accept the Hypothetical—"

"Let's call it C," said the Tortoise.

—but you don't accept

(C) If A and B are true, Z must be true."

"That is my present position," said the Tortoise.

"Then I must ask you to accept C."

"I'll do so," said the Tortoise, "as soon as you've entered it in that note-book of yours. What else have you got in it?"

"Only a few memoranda," said Achilles, nervously fluttering the leaves: "a few memoranda of—of the battles in which I have distinguished myself!"

"Plenty of blank leaves, I see!" the Tortoise cheerily remarked. "We shall need them all!" (Achilles shuddered.) "Now write as I dictate:—"

(A) Things that are equal to the same are equal to each other.

- (B) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
(C) If A and B are true, Z must be true.
(Z) The two sides of this Triangle are equal to each other."

"You should call it D, not Z," said Achilles. "It comes next to the other three. If you accept A and B and C, you must accept Z."

"And why must I?"

"Because it follows logically from them. If A and B and C are true, Z must be true. You don't dispute that, I imagine?"

"If A and B and C are true, Z must be true," the Tortoise thoughtfully repeated.

"That's another Hypothetical, isn't it? And, if I failed to see its truth, I might accept A and B and C, and still not accept Z, mightn't I?"

"You might," the candid hero admitted; "though such obtuseness would certainly be phenomenal. Still, the event is possible. So I must ask you to grant one more Hypothetical."

"Very good. I'm quite willing to grant it, as soon as you've written it down. We will call it

(D) If A and B and C are true, then Z must be true.

Have you entered that in your note-book?"

"I have!" Achilles joyfully exclaimed, as he ran the pencil into its sheath. "And at last we've got to the end of this ideal race-course! Now that you accept A and B and C and D, of course you accept Z."

"Do I?" said the Tortoise innocently. "Let's make that quite clear. I accept A and B and C and D. Suppose I still refused to accept Z?"

"Then Logic would take you by the throat, and force you to do it!" Achilles triumphantly replied. "Logic would tell you 'You can't help yourself. Now that you've accepted A and B and C and D, you must accept Z!' So you've no choice, you see."

"Whatever Logic is good enough to tell me is worth writing down," said the Tortoise. "So enter it in your book, please. We will call it

(E) If A and B and C and D are true, Z must be true.

Until I've granted that, of course I needn't grant Z. So it's quite a necessary step, you see?"

"I see," said Achilles; and there was a touch of sadness in his tone.

Here the narrator, having pressing business at the Bank, was obliged to leave the happy pair, and did not again pass the spot until some months afterwards. When he did so, Achilles was still seated on the back of the much-enduring Tortoise, and was writing in his note-book, which appeared to be nearly full. The Tortoise was saying "Have you got that last step written down? Unless I've lost count, that makes a thousand and one. There are several millions more to come. And would you mind, as a personal favour, considering what a lot of instruction this colloquy of ours will provide for the Logicians of the

Nineteenth Century—would you mind adopting a pun that my cousin the Mock-Turtle will then make, and allowing yourself to be re-named Taught-Us?"

"As you please!" replied the weary warrior, in the hollow tones of despair, as he buried his face in his hands. "Provided that you, for your part, will adopt a pun the Mock-Turtle never made, and allow yourself to be re-named A Kill-Ease!"

亀がアキレスに言ったこと(邦訳) What the Tortoise said to Achilles

ルイス・キャロル Lewis Carroll

石波杏訳

<http://www13.plala.or.jp/nami/tortoise.html>

アキレスは、亀に追いついて、甲羅の上に座ってくつろいでいました。

「じゃあ貴方は競走コースのゴールに到着したというんですか？」亀は言いました。「コースは無限級数の距離からなるというのに。ゴールなんてできないって、誰だったか頭のいい人が証明したんじゃないやありませんでしたっけ。」

「できたんだよ」アキレスは言いました。「やってやった！ 案ずるより歩くが易し。分かるだろ、距離はだんだん減っていくんだ。だから…」

「でも、だんだん増えていくとしたら？」亀は遮って言いました。「そしたらどうですか？」

「そしたら俺はここにいないだろうね」アキレスは謙遜して答えました。「それで君は今ごろ世界を何周もしてるだろう！」

「褒めすぎ…、いえ、重すぎです」亀が言いました。「なにしろ貴方はとても重々しい。間違いようありません。ところで、ある競走コースの話をお聞かせしましょうか。二歩か三歩のステップでゴールに着きそうだとみんなが思うのに、実際には無限の距離からなるコースで、しかもどんどん長くなっていくんです。」

「ぜひ！」ギリシアの戦士はそう言って、巨大なノートと鉛筆をヘルメットから(ポケットなんてありませんからね)引っ張り出しました。「続けてくれ！ ただし話はゆっくりと頼むよ。速記術なんてまだ発明されていないんだから！」

「かの美しき、ユークリッドの第一命題！」亀は夢見るようにささやきました。「ユークリッド幾何学を愛していますか？」

「情熱的に！ 少なくとも、今から何世紀も経たないと書かれない文献を愛する、なんてことができるならね！」

「それでは、第一命題にまつわる議論をちよつとだけ取り上げましょう。二つのステップと、そこから引き出される帰結、その三つだけです。どうぞ、ノートに書き込んでください。話がしやすいように、それらをA、B、Zと呼ぶことにしましょう。」

- (A)同一のものに等しい二つのものは、互いに等しい。
(B)この三角形の二つの辺は、同一のものに等しい。
(Z)この三角形の二つの辺は、互いに等しい。

ユークリッドの読者は、AとBからZを論理的に導けると考えていますよね。つまり、AとBを真だと認める人は誰でも、Zが真だと認めなければならない、と。」

「間違いない！ 高校に入ったばかりの子供でも分かるだろう。高校が発明されればすぐだよ、それまであと二千年くらいかかるかもしれないが。」

「もし、AとBを真だと認めない読者がいたとしても、この一連の流れ自体が**妥当なもの**だということは認めるでしょうね？」

「そういう読者も間違いなくいるだろう。彼はこう言うんだ、『もしAとBが真であるとしたらZは真でなければならない、という仮言命題(=仮定を含んだ命題)が真であることは認めるよ。でもAやBが真だとは認められない』。そんな読者は、ユークリッドを捨ててフットボールをやるのが賢明だろうな。」

「他に、こんなことを言う読者はいないでしょうかね、『私はAとBを真だと認めるけど、その仮言命題は受け入れないよ』なんて。」

「確実にいるだろう。彼もフットボールをやったほうがいいな。」

「どちらの読者も」亀は続けました。「Zを真だと認めることに論理的必然性があるとは、まだ思えないんじゃないでしょうか。」

「全くその通りだ」アキレスは同意しました。

「では、私を、いま言った二番目の読者と見なして下さい。そして論理的に、Zを真であると私に認めさせてください。」

「フットボールをやる亀なんて…」アキレスは言いかけてました。

「珍妙です、もちろん」亀はあわてて遮りました。「話をそらさないで下さい。まずはZのことで、フットボールは後で！」

「Zを認めさせればいいんだな、俺は。」アキレスは考えながら言いました。「今の君の立場は、AとBは認めるが、仮言命題は認めない。そうだな？」

「それをCと呼びましょう」亀は言いました。

「君が認めないのは…、

(C)もしAとBが真ならばZは真でなければならない。」

「そう、それが今の私の立場です」亀は言いました。

「じゃあ、Cを認めるように君にお願いしなければいけない。」

「認めますよ」亀は言いました。「貴方がそのノートに書き加えてくれればすぐにね。他に何が書いてあるんですか？」

「ちょっとしたメモだけだ」アキレスは、神経質そうにページをパラパラめくりながら言いました。「ちょっとした…、自分が活躍した戦いのメモだ！」

「白いページがたくさんありますね！」亀は明るい声で言いました。「それ全部必要になりますよ！」(アキレスは震えました。)
「では私の言うとおりに書いて下さい。」

- (A)同一のものに等しい二つのものは、互いに等しい。
- (B)この三角形の二つの辺は、同一のものに等しい。
- (C)もしAとBが真ならば、Zは真でなければならない。
- (Z)この三角形の二つの辺は、互いに等しい。」

「Dと呼ぶべきじゃないか、Zじゃなくて。」アキレスは言いました。「他の三つの次なんだからな。もし君がAとBとCを認めるなら、Zを認めなければならない。」

「どうして、認めなければならないんですか？」

「論理的に導かれるからだ。もしAとBとCが真なら、Zは真でなければならない。君だって疑いようがないだろう。」

「もしAとBとCが真なら、Zは真でなければならない」亀は考え込むように繰り返しました。「それはまた別の仮言命題ではないですか。それが真だということが分からなければ、私は、AとBとCを認めても、まだZを認めないかもしれませんよ？」

「そうだな」誠実にも英雄は認めました。「全く驚異的な鈍感さだが、そういうこともありうる。では、君にもう一つ仮言命題を受け入れるようお願いしなければならない。」

「よろしい。喜んで受け入れましょう、貴方が書き留めたらすぐにね。それをDと呼びましょう、(D)もしAとBとCが真ならば、Zは真でなければならない。」

ノートに記入しましたか？」

「したとも！」アキレスは楽しそうに叫んで、鉛筆をケースにしまいました。「ついにこの観念的な競走コースのゴールに着いた！ いまや君はAとBとCとDを認めたのだ、当然、Zを認めるだろう。」

「私が？」亀は無邪気に言いました。「きっぱりはつきりさせましょう。私はAとBとCとDを認めた。それでも、私がZを認めることを拒否するとしたら？」

「その時は、論理が君ののどにつかみかかって、無理にでも認めさせるだろう！」アキレスは勝ち誇って答えました。「論理は君に告げる。『お前に自由は無いぞ。AとBとCとDを認めたからには、Zを認めねばならない！』 だから君に選択の余地は無いんだ。」

「論理が私に教えてくれるような素晴らしいことなら、書き留めておく価値があります」亀は言いました。「どうぞ、ノートに記入してください。それを、こう呼びましょう。」

(E)もしAとBとCとDが真なら、Zは真でなければならない。

私がそれを受け入れるまでは、当然ながら、Zを受け入れる必要はありません。これはやむを得ないステップです、そうですね？」

「そうだ」アキレスは言いました。その声は悲しげでした。

ここで語り手は、銀行に行く急ぎの用事がありましたので、幸せな二人組のもとをやむなく立ち去りました。そしてその場所を再び通ったのは、数ヶ月後のことでした。アキレスは、まだ我慢強い亀の背中に座っており、書き込みを続けていて、ノートはもういっぱいになりそうでした。亀が言っていました。「最後のステップを書き込みましたか？ 数え間違いがなければ、千一番目です。これからまだ数百万はありますよ。ところで、もし良ければ、これは個人的な

好意で申し上げるのですが、私たちの対話が十九世紀の論理学者たちにいかにたくさんの教訓を与えるかを踏まえて…、十九世紀に私のイトコの手塚モドキが言いそうな冗談なのですが、もし良ければ、『亀仙人』と呼ばせて頂けないでしょうか」

「好きにしてくれ!」へとへとのはたしは、両手で顔を覆いながら、全てを諦めた様子で答えました。「君のほうこそ、手塚モドキが決して言わなそうな冗談で、『アキレス・ストレス・エンドレス』に改名するといい!」

ジョン・R・サール『行為における合理性』での変形した引用

『行為と合理性』p19～24

2. 合理性とは、合理性の規則に従うことに尽きるのではない。そうすることにおおむね存するのですらない

古典モデルの第二の主張、すなわち合理性とは規則の問題であり、われわれがそれらの規則に従って考えたり行為したりする程度に応じてのみ、われわれの思考や行動は合理的なのだという考えに移ろう。この主張を正当化せよと求められたなら、伝統的な論者の多くは、おそらく論理学の規則に訴えるであろう。古典モデルの擁護者が示しそうな事例のうち、最もわかりやすいものは、たとえば単純な肯定式の論証である。

もし今夜雨が降るならば、地面が濡れる。

今夜雨が降る、

ゆえに、地面が濡れる。

この推論の正統化を求められたなら、肯定式の規則に訴えたいくなるだろう。すなわち、 p と p ならば q は、 q を含意するというものである。

$(p \& (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

しかしこれは致命的誤りである。こう言ったら最後、ルイス・キャロルのパラドクスから逃れることはできない。パラドクスを復習しよう。アキレスと亀が論争をしており、アキレスはこういう（この例はルイス・キャロルのものとは異なるが、論点は同じである）。「もし今夜雨が降るならば、地面が濡れる。今夜雨が降る。ゆえに、地面が濡れる」。それに答えて、亀が言う。「よかろう、それを全部書いていってくれ、全部書いてくれ」。アキレスがそうすると、亀が言う。「『ゆえに』の前にあるものからその後にあるものにどうやったら行かれるのか、行かれるのか、わからんね。その移行は何によって強制されるのだ。そもそもその移行は正当化されるのかね」。アキレスは答えてこういう。「この移行は肯定式の規則によるのだよ。つまり p と、 p ならば q は、 q を含意するという規則だ」。「よかろう」と亀は言う。「ではそれも書いてくれ。何もかもぜんぶ書いてくれ」。アキレスがそうすると、亀は言う。「ぜんぶ書いてもらったが、地面が濡れるという結論にどうしてたどり着くのか、まだわからんね」。アキレスは言う。「どうしてわからないんだ。 p と、 p ならば q と、 p と p ならば q ならば q からは q を推論して良いという肯定式の規則からは q を推論できるじゃないか」。「よかろう」と亀は言う。「では、それもぜんぶ書いて

くれ」。この先どうなるかはわかりであろう。われわれは無限後退に陥るほかないのである。

無限後退に陥らない方法は、推論の妥当にとって公的式の規則はいかなる役割も果たさないと考えることで、最初の致命的な誤りを回避することである。導出の妥当性は、肯定式の規則から得られるのではない。ほかのものの助力なしに、推論はそのまま完全に妥当である。より正確に言えば、それ自体で妥当な無数の推論に見られるパターンを描くことによって、肯定式の規則のほうが妥当性を付与されるのである。それは前提から結論が帰結するからにほかならない。語の意味自体が推論の妥当性を保証するに十分であればこそ、そのような無数の推論を記述するパターンを定式化することも可能となる。しかし、推論がそのパターンから妥当性をえるのではない。いわゆる肯定式の規則とは、それ自体で妥当な無数の推論にみられるパターンを述べたものにすぎないのである。つぎのことを忘れてはならない。「pと、pならばqから、qを推論するにあたって、規則が必要と考えるならば、pからpを推論するにあたって規則が必要になるだろう」。

この論証に関して言えることは、妥当な論証のいかなるものに関しても言える。論理的妥当性は論理学の規則に由来するのではないのである。

この点を正確に理解することは大切である。肯定式を規則としてではなく、もうひとつの前提として扱ったしまった点でアキレスは誤ったのでだと言われることがよくある。そうではない。アキレスがそれを前提としてではなく規則として書いたとしてもやはり無限後退は生じたであろう。導出の妥当性は前提及び推論の規則に由来するというのも同じように誤りである(まさに同じ過ちを犯している)。そうではなく、妥当な推論の妥当性において、論理学の規則は何の役割も話していないというのが正しい。論証が妥当なとき、それはそのままだとうでなければならないのである。

我々は高度な知識を持ってしまったせいで、実はかえってこの点を理解しにくくなっている。というのも、証明論があまりに華々しい成功をおさめ、コンピュータ科学などの分野で重要な成果をもたらしたことから、われわれは、構文論において肯定式の役割を果たすものが、論理学の「規則」とほんとうに同じものだと思ってしまうのである。しかし、それはまったく別である。

p

という形の記号が

$p \rightarrow q$

という形の記号の前に書かれているのをあなたが見たとき、あるいはコンピュータがそれを「見た」とき、あなたあるいはコンピュータは

q

という形の記号を書く、という規則が与えられたとしよう、この時あなたはひとつの規則を手にしており、あなたはそれに従うことができるし、それを機械にプログラムして、機械のはたらしを因果的に決めることもできる。これは証明論において、肯定式の規則の役割を果たすものである。そして証明論では、この規則は単なる記号に対して働くものであるがゆえに、本

当に実質的なものである。その規則は、それ以外の点では解釈されることのない形式的要素に対してはたらくのである。

現実の推論では、肯定式の規則はいかなる正統化の役割も演じないのに、われわれはこうして、その事実気づかなくなってしまう。証明論や構文論のモデルを作り、現実の人間が行う実地スや内容のある推論過程を、そのモデルが正確に写しとるようにすることは確かにできる。そしてもちろん誰もが知っているように、モデルを用いてできるさまざまなことがある。構文論が正しいければ、最初に意味論を入れてやると後は勝手にことが進み最後に正しい意味論が出てくる。構文論的変換が正しいからである。

名高いゲーデルの定理を始め、よく知られた問題がいくつかあるが、それには関わらないことにすると、機械の推論モデルによるシミュレーションが高度になったおかげで、われわれは意味論的内容を忘れてしまうのである。しかし現実の推論では、推論の妥当性を保証するのは意味論的内容であって、構文論的規則ではない。

ルイス・キャロルのパラドクスに関連して、哲学的に重要な事柄が二つある。第一はこれまで検討してきたもので推論の妥当性において規則は何の役割も果たさないということである。第二の点は、飛躍に関わる。「われわれは、論理的関係としての帰結関係や妥当性と、人間の自発的な活動としての推論とを区別しなければならない」。われわれの考察した事例では、前提から結論が帰結し、ゆえに推論は妥当である。しかしこのことは決して、言ん捨の人間がこの推論を行うことを強制するものではない。推論という人間の活動には、他のあらゆる自発的活動と同じく、飛躍がある。仮にわれわれが、この推論はそのままで妥当であり、肯定式の規則は推論の妥当性にまったく寄与しないという点をアキレスと亀に納得させることができたとしても、推論を行うことを拒否するという不合理を亀が発揮することはありうる。飛躍は、論理的推論にも当てはまるのである。

その他の解釈([Wikipedia 亀がアキレスに言ったこと](#))

ラッセル

バートランド・ラッセルは「プリンキピア・マテマティカ」(1903年)で簡単な議論をしている。それによれば、自明ではない命題間の関係である含意 implication (「 p ならば q である」という形式による結びつき)と、自明である命題間の関係である推論 inference (「 p であるゆえに q である」という形式による結びつき)を区別すべきだという。この違いを明確にすることでラッセルは、 A と B が等しいことから Z だという含意によって論じようとする、あるいは仮言的な「 A と B が正しいならば、 Z は正しい」ということへの含意へと議論を依存させようとする亀の試みを否定できるとしている。

ピーター・ウィンチ

このパラドクスが示唆しているのは「推理をしようとする実際の(actual)なプロセスがつまりはこのパラドクスの核心なのだが、それは論理で定式化されたものとしては提示しえない何かだ…。推論を身につけることは命題同士の論理的な関係を明らかにすることを教えられればよいということでは全くない。それは何をするかを学ぶことなのだ」

